

# **Моделирование систем массового обслуживания**

**Бивойна Т.Ю.**

**Научный руководитель: Шельмина Е.А.**

*Томский государственный университет систем управления и  
радиоэлектроники*

*Кафедра экономической математики, информатики и статистики*

## **Введение**

С развитием новых технологий, в нашу жизнь вошло такое понятие как моделирование. Моделирование используется тогда, когда эксперименты с реальными объектами или системами невозможны или слишком дорогостоящие. Главным отличием моделирования от других методов изучения систем является возможность оптимизации системы до её реализации [1].

Математические модели делят на аналитические и имитационные. Аналитические модели представляют собой уравнения или системы уравнений, записанные в виде алгебраических, интегральных, дифференциальных соотношений. Данный тип моделей обычно применяют для описания фундаментальных свойств объектов, так как фундамент прост по своей сути. Сложные объекты редко удаётся описать аналитически [2].

Альтернативой аналитическим моделям являются имитационные модели. Основное отличие имитационных моделей от аналитических состоит в том, что вместо аналитического описания взаимосвязей между входами и выходами исследуемой системы строят алгоритм, отображающий последовательность развития процессов внутри исследуемого объекта, а затем просматривают поведение объекта на компьютере [2].

## **Моделирование систем массового обслуживания**

Моделирование систем массового обслуживания (СМО) это универсальный способ для исследования модели. Расчёт и анализ характеристик систем массового обслуживания является одним из основных направлений исследований как в области аналитического, так и имитационного моделирования.

В представленной работе были поставлены следующие задачи:

- исследовать модель используя аналитический метод;
- осуществить анализ полученных результатов;
- описать алгоритм имитационного метода.

Для решения этих задач использовались следующие входные данные:

- Количество каналов обслуживания
- Максимальная длина очереди
- Интенсивность потока заявок
- Интенсивность потока обслуживания.

В результате чего были вычислены показатели эффективности:

- Вероятность отказа
- Относительная пропускная способность
- Абсолютная пропускная способность
- Среднее число занятых каналов
- Среднее время простоя СМО
- Среднее число обслуживаемых заявок

## **Постановка задачи**

Система массового обслуживания представлена системой с отказами и числом каналов обслуживания  $n$ , максимальная длина очереди  $m$ , интенсивность потока заявок на

обслуживание  $\lambda$  и интенсивность потока обслуживания  $\mu$ . Нужно составить аналитическую модель и рассчитать показатели эффективности.

### Аналитический метод моделирования

Для аналитического моделирования будем использовать уравнения Колмогорова, для вычисления вероятностей:

$$\begin{cases} \frac{dP_1}{dt} = \lambda_{21}P_2 - (\lambda_{12} + \lambda_{13})P_1 \\ \frac{dP_2}{dt} = \lambda_{12}P_1 + \lambda_{32}P_3 - (\lambda_{21} + \lambda_{24})P_2 \\ \frac{dP_3}{dt} = \lambda_{13}P_1 + \lambda_{43}P_4 - \lambda_{32}P_3 \end{cases}$$

Вычисление финальных вероятностей:

$$\begin{cases} S_0: \lambda_{10}P_1 - \lambda_{01}P_0 = 0 \\ S_1: \lambda_{21}P_2 - \lambda_{12}P_1 = 0 \\ S_k: \lambda_{k+1,k}P_{k+1} - \lambda_{k,k+1}P_k = 0, k = 0, \dots, n-1 \\ P_0 + P_1 + \dots + P_n = 1 \end{cases}$$

Метод Эйлера:

$$\frac{dP_i}{dt} = f(P_0, P_1, \dots, P_n), \quad i = 0, 1, \dots, n$$

Показатели вычисляются следующими формулами:

- Вероятность отказа:

$$P_{отк} = P_n = \frac{\rho^n}{n!} \cdot P_0$$

$$p = \frac{\lambda}{\mu}$$

- Относительная пропускная способность

$$q = 1 - P_{отк} = 1 - \frac{P_n}{n!} \cdot P_0$$

- Абсолютная пропускная способность

$$A = \lambda \cdot q = \lambda \cdot (1 - P_{отк})$$

- Среднее число занятых каналов

$$k_3 = \sum_{k=1}^n k \cdot P_k = \rho(1 - P_{отк})$$

- Среднее время простоя СМО

$$T_0 = P_{отк} * t_{обс}$$

$$t_{обс} = \frac{1}{\mu}$$

- Среднее число обслуживаемых заявок [1]

$$L_0 = p * q$$

### Имитационный метод моделирования

Для имитации СМО воспользуемся одним из методов статистического моделирования – имитационным моделированием. Будем использовать пошаговый подход. Суть этого подхода в том, что состояния системы рассматриваются в последующие моменты времени, шаг между которыми является достаточно малым, чтобы за его время произошло не более одного события.

Этапы создания имитационной модели

1. Этап описания реально существующей системы в терминах характеристик основных событий. Эти события, как правило, связаны с переходами изучаемой системы из одного возможного состояния в другое и обозначаются как точки на временной оси. Для достижения основной цели моделирования достаточно наблюдать систему в моменты реализации основных событий.

2. Этап выбора единицы времени. В зависимости от природы моделируемой системы такой единицей может быть микросекунда, час, год и т.д.

3. Этап достижения изучаемой системой стационарного режима функционирования. В этом случае резко уменьшается выборочная дисперсия.

Для того чтобы получить данные с меньшей ошибкой можно выполнить следующие действия:

1) увеличить длительность времени имитационного моделирования процесса функционирования изучаемой системы. В этом случае не только увеличивается вероятность достижения системой стационарного режима функционирования, но и возрастает число  $n$  используемых псевдослучайных чисел, что также положительно влияет на качество получаемых результатов.

2) при фиксированной длительности времени  $T$  имитационного моделирования провести  $N$  вычислительных экспериментов, называемых еще прогонами модели, с различными наборами псевдослучайных чисел, каждый из которых дает одно наблюдение. Все прогоны начинаются при одном и том же начальном состоянии моделируемой системы, но с использованием различных наборов псевдослучайных чисел.

Если число  $N$  модели достаточно велико, то границы симметричного доверительного интервала для параметра  $x$  определяются следующим образом:

$$\underline{x} = \bar{x} - t_\gamma \frac{S}{\sqrt{N}}$$

$$\bar{x} = \bar{x} + t_\gamma \frac{S}{\sqrt{N}}$$

$\bar{x}$  - математическое ожидание (среднее значение), находится по формуле

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k$$

$S$  - исправленная дисперсия,

$$S^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (x_k - \bar{x})^2$$

$N$  – число прогонов программы,  $\gamma$  – надежность,  $t_\gamma = t(\gamma, N)$  [3].

## Результаты

Результатом проделанной работы, является программа, написанная с использованием VBA, которая по введенным параметрам проводит параметры эффективности системы

(рисунок 1). В дальнейшем будет проведен анализ СМО имитационным методом и сделано сравнение этих методов.

Количество каналов обслуживания	3	Вероятность отказа	0.45
Максимальная длина очереди	2	Относительная пропускная способность	0.55
Интенсивность потока заявок	4	Абсолютная пропускная способность	2.2
Интенсивность потока обслуживания	1	Среднее число занятых каналов	2.2
		Среднее время простоя СМО	0.45
		Среднее число обслуживаемых заявок	2.2

Вычислить      Очистить

Рисунок1. Аналитическая модель

### Список использованной литературы

1. Бережная Е.В. Бережной В.И. Математические методы моделирования экономических систем – М., 2007.- 432 с.
2. Радченко Т.А., Дылевский А.В. Методы анализа систем массового обслуживания- Воронеж, 2007.-62 с.
3. Моделирование систем [Электронный ресурс]: <http://sardismusic.com/t3.html>