Олимпиада по математике ТУСУР, 2019
2-4 курс задача 1

Вычислить интеграл $\int \sin^2(\ln x)dx$.

Решение. Сделаем замену $\ln x = t$. Тогда $x = e^t$, $dx = e^t dt$.

$\int \sin^2(\ln x)dx = \int \sin^2(t)e^t dt$. По формуле понижения степени,

$$\int \sin^2 t e^t dt = \int\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)e^t dt = \frac{1}{2}\int(1-\cos 2t)e^t dt = \frac{1}{2}\int e^t dt - \frac{1}{2}\int e^t \cdot \cos 2t dt$$

1-й элементарный, а во 2-м циклический интеграл.

Рассмотрим $I = \int e^t \cos 2t dt$.

$u = e^t$	$v = \frac{1}{2}\sin 2t$
$du = e^t dt$	$dv = \cos 2t dt$

$I = \int e^t \cos 2t dt = \frac{e^t}{2}\sin 2t - \frac{1}{2}\int e^t \sin 2t dt$. Применив 2-е интегрирование по частям,

$u_2 = e^t$	$v_2 = -\frac{1}{2}\cos 2t$
$du_2 = e^t dt$	$dv_2 = \sin 2t dt$

$$I = \frac{e^t}{2}\sin 2t - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}e^t \cos 2t + \frac{1}{2}\int e^t \cos 2t dt\right)$$

$$I = \frac{1}{2}e^t \sin 2t + \frac{1}{4}e^t \cos 2t - \frac{1}{4}I \qquad \left(1+\frac{1}{4}\right)I = \frac{1}{4}e^t \sin 4t + \frac{1}{4}e^t \cos 4t$$

$$\frac{5}{4}I = \frac{1}{2}e^t \sin 2t + \frac{1}{4}e^t \cos 2t \qquad I = \frac{e^t}{5}(2\sin 2t + \cos 2t) + C.$$

Вернёмся к сумме интегралов.

$$\frac{1}{2}\int e^t dt - \frac{1}{2}\int e^t \cdot \cos 2t dt = \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}\frac{e^t}{5}(2\sin 2t + \cos 2t) + C =$$

$e^t\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\sin 2t - \frac{1}{10}\cos 2t\right) + C$. После обратной замены: $x\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\sin(2\ln x) - \frac{1}{10}\cos(2\ln x)\right) + C =$

Ответ. $\frac{x}{2} - \frac{x}{5}\sin(2\ln x) - \frac{x}{10}\cos(2\ln x) + C$.

Примечание. *Проверка.* $\left(\frac{x}{2} - \frac{x}{5}\sin(2\ln x) - \frac{x}{10}\cos(2\ln x)\right)' =$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\sin(2\ln x) - \frac{1}{10}\cos(2\ln x) - \frac{x}{5}\frac{2}{x}\cos(2\ln x) + \frac{x}{10}\frac{2}{x}\sin(2\ln x) =$$

$$\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{5} + \frac{2}{10}\right)\sin(2\ln x) - \left(\frac{1}{10} + \frac{2}{5}\right)\cos(2\ln x) = \frac{1-\cos(2\ln x)}{2} = \sin^2(\ln x).$$

Олимпиада по математике   ТУСУР, 2019
2-4 курс   задача 2

Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^{2019}+3^{2019}+5^{2019}+\ldots+(2n-1)^{2019}}{2^{2019}n^{2020}}$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^{2019}+3^{2019}+5^{2019}+\ldots+(2n-1)^{2019}}{2^{2019}n^{2020}}=$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2019}+\left(\frac{3}{2}\right)^{2019}+\left(\frac{5}{2}\right)^{2019}+\ldots+\left(\frac{2n-1}{2}\right)^{2019}}{n^{2020}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{2n}\right)^{2019}+\left(\frac{3}{2n}\right)^{2019}+\left(\frac{5}{2n}\right)^{2019}+\ldots+\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{2019}}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\left(\frac{1/2}{n}\right)^{2019}+\left(\frac{3/2}{n}\right)^{2019}+\left(\frac{5/2}{n}\right)^{2019}+\ldots+\left(\frac{(2n-1)/2}{n}\right)^{2019}\right)$$

Здесь присутствует интегральная сумма функции x^{2019} на отрезке [0,1], где значения функции рассматриваются ровно в серединах интервалов $\left(0,\frac{1}{n}\right)$, $\left(\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right)$, $\left(\frac{2}{n},\frac{3}{n}\right)$, ...

В пределе эта интегральная сумма сходится к интегралу $\int\limits_0^1 x^{2019}dx=\left.\dfrac{x^{2020}}{2020}\right|_0^1=\dfrac{1}{2020}$.

Ответ. $\dfrac{1}{2020}$.

Олимпиада по математике ТУСУР, 2019
2-4 курс задача 3

Найти общее решение дифференциального уравнения: $6y' + 6xy'' + x^2 y''' = 2xy + x^2 y'$

Решение. Можно заметить, что правая часть - это производная от $x^2 y$:

$$(x^2 y)' = 2xy + x^2 y'$$

Исследуем следующие производные от $x^2 y$:

$(x^2 y)'' = (2xy + x^2 y')' = 2y + 2xy' + 2xy' + x^2 y'' = 2y + 4xy' + x^2 y''$. Тогда 3-я производная:

$(x^2 y)'''\ (2y + 4xy' + x^2 y'')' = 2y' + 4y' + 4xy'' + 2xy'' + x^2 y''' = 6y' + 6xy'' + x^2 y'''$, что как раз и равно левой части.

Итак, уравнение сводится к $(x^2 y)''' = (x^2 y)'$. Обозначим $f = x^2 y$.

Уравнение имеет вид $f''' - f' = 0$. Это линейное однородное уравнение.

Характеристическое: $r^3 - r = 0$. $r(r^2 - 1) = 0$, корни 0, 1, -1.

Общее решение $f = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x}$, то есть $x^2 y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x}$, тогда

$y = \frac{1}{x^2}(C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x})$. **Ответ.** $y = \frac{1}{x^2}(C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x})$.

Олимпиада по математике ТУСУР, 2019
2-4 курс задача 4

Найти сумму функционального ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{2n!}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2x^{1+4n}}{(1+4n)!}$.

Решение. Заметим, что $\frac{1+(-1)^n}{2}=1$ при чётном n, и 0 при нечётном.

Запишем подробнее: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{2}\frac{x^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2x^{1+4n}}{(1+4n)!}=\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+...\right)+2\left(x+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^9}{9!}+...\right)$.

Заметим, что при вычислении 2-й производной, в первой скобке получится точно такая же сумма, как и была, а во 2-й вместо степеней 1,5,9,... будут другие нечётные степени, которых не было ранее, а именно 3,7,...

$$y''(x)=\left(0+1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}...\right)+2\left(0+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^7}{7!}+...\right).$$

Сумма исходной функции и её 2 производной содержит все степени, $\forall n\in N$:

$$y+y''=2\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}...\right)+2\left(x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}...\right)=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=2e^x.$$

$y''+y=2e^x$ - линейное неоднородное дифференциальное уравнение.

Характкристическое уравнение $r^2+1=0$, корни $\pm i$,общее решение соответствующего однородного уравнения: $C_1\cos x+C_2\sin x$. По правой части $b(x)=2e^x$ строим частное решение неоднородного уравнения. Число 1 не принадлежит множеству чисел $\pm i$, поэтому частное решение ищется в виде $y=Ae^x$. Тогда $y''+y=Ae^x+Ae^x=2e^x$, откуда $A=1$.

Итак, общее решение неоднородного уравнения: $y=C_1\cos x+C_2\sin x+e^x$.

Найдём константы. По строению ряда видно, что $y(0)=1$, $y'(0)=2$.

$y=C_1\cos x+C_2\sin x+e^x \quad\Rightarrow\quad y(0)=C_1+1=1 \quad\Rightarrow\quad C_1=0$

$y'=-C_1\sin x+C_2\cos x+e^x \quad\Rightarrow\quad y'(0)=C_2+1=2 \quad\Rightarrow\quad C_2=1$

Частное решение: $y=\sin x+e^x$.

Ответ. $y=\sin x+e^x$.

Олимпиада по математике ТУСУР, 2019
2-4 курс задача 5

Вычислить интеграл $\int\limits_L \frac{1}{z\bar{z}}dz$ по неограниченной кривой L в комплексной плоскости, где L - множество точек параболы $y = x^2$ правее точки $1+i$.

Решение. $\int\limits_L \frac{1}{z\bar{z}}dz = \int\limits_L \frac{1}{(x+iy)(x-iy)}(dx+idy) = \int\limits_L \frac{1}{x^2+y^2}(dx+idy) = \int\limits_L \frac{1}{x^2+y^2}dx + i\int\limits_L \frac{1}{x^2+y^2}dy$.

При этом $y = x^2$, $dy = 2xdx$, $x \in (1,+\infty)$.

$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2+x^4} + i\int\limits_1^\infty \frac{2xdx}{x^2+x^4}$. Во втором подведём под знак дифференциала. При этом происходит замена $t = x^2$, и $t \in (1,+\infty)$

$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2(1+x^2)} + i\int\limits_1^\infty \frac{d(x^2)}{x^2+x^4} = \int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2(1+x^2)} + i\int\limits_1^\infty \frac{dt}{t+t^2} .$$

Далее оба интеграла решаются с помощью разложения рациональных дробей в сумму простейших.

$$\frac{1}{x^2(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{1+x^2} = \frac{Ax(1+x^2)+B(1+x^2)+(Cx+D)x^2}{x^2(1+x^2)},$$

Сравнивая числители, получаем $Ax + Ax^3 + B + Bx^2 + Cx^3 + Dx^2 = 1$

$(A+C)x^3 + (B+D)x^2 + Ax + B = 0x^3 + 0x^2 + 0x + 1$, откуда получаем 4 равенства:

$A+C=0$, $B+D=0$, $A=0$, $B=1$

Тогда $A=0$, $B=1$, $C=0$, $D=-1$.

$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2(1+x^2)} = \int\limits_1^\infty \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^\infty - arctgx\Big|_1^\infty = 1 - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

Во втором интеграле (мнимая часть):

$$\frac{1}{t+t^2} = \frac{1}{t(1+t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1+t} = \frac{A(1+t)+Bt}{t(1+t)},\ (A+B)t + A = 0t+1 \Rightarrow A=1,\ B=-1.$$

$$\int\limits_1^\infty \frac{dt}{t+t^2} = \int\limits_1^\infty \frac{1}{t}dt - \int\limits_1^\infty \frac{1}{1+t}dt = \ln\left|\frac{t}{t+1}\right|\Bigg|_1^\infty = \ln 1 - \ln\frac{1}{2} = 0 + \ln 2.$$

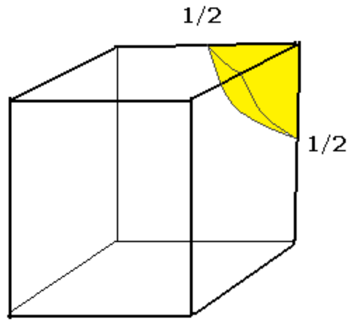
Ответ. $\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \ln 2$.

Олимпиада по математике ТУСУР, 2019
2-4 курс задача 6

Три точки случайным образом брошены на отрезок [0,1]. Найти вероятность того, что произведение их абсцисс больше, чем $\frac{1}{2}$.

Решение.

Отложим 3 случайных значения по 3 осям координат. Дано: $xyz > \frac{1}{2}$. Нужно найти отношение объёма тела, для точек которого выполняется $xyz > \frac{1}{2}$, к объёму единичного куба. Все искомые точки лежат выше поверхности $z = \frac{1}{2xy}$.



На верхней грани выполнено $z = \frac{1}{2xy} = 1 \;\Rightarrow\; y = \frac{1}{2x}$, это определяет границу проекции тела на горизонтальную плоскость, т.е. границы для двойного интеграла по x, y.

$$V = \int_{1/2}^{1} dx \int_{1/2x}^{1} \left(1 - \frac{1}{2xy}\right) dy = \int_{1/2}^{1} \left(y\Big|_{1/2x}^{1} - \frac{1}{2x} \ln y \Big|_{1/2x}^{1} \right) dx = \int_{1/2}^{1} \left(1 - \frac{1}{2x} - \frac{0 - \ln \frac{1}{2x}}{2x} \right) dx = \int_{1/2}^{1} \left(1 - \frac{1}{2x} - \frac{\ln 2x}{2x}\right) dx$$

$$= \int_{1/2}^{1} \left(1 - \frac{1}{2x} - \frac{\ln 2}{2x} - \frac{\ln x}{2x}\right) dx = \int_{1/2}^{1} \left(1 - \frac{1 + \ln 2}{2x} - \frac{1}{2}\frac{\ln x}{x}\right) dx = \int_{1/2}^{1} dx - \frac{1 + \ln 2}{2} \int_{1/2}^{1} \frac{1}{x} dx - \frac{1}{2} \int_{1/2}^{1} \ln x \, d(\ln x) =$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1 + \ln 2}{2} \ln x \Big|_{1/2}^{1} - \frac{1}{2} \frac{\ln^2 x}{2} \Big|_{1/2}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{1 + \ln 2}{2} \left(0 - \ln \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \frac{0 - \ln^2\left(\frac{1}{2}\right)}{2} =$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1 + \ln 2}{2} \ln 2 + \frac{1}{4} \ln^2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\ln^2 2}{2} + \frac{\ln^2 2}{4} = \frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2} - \frac{\ln^2 2}{4} .$$

Ответ. $\frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2} - \frac{\ln^2 2}{4}$.