Олимпиада по математике ТУСУР, 2019
1 курс задача 1

Найти все действительные решения уравнения: $2^{\sin^2 x} + 2^{3+\cos^2 x} = 10$.

Решение. Запишем в виде $2^{\sin^2 x} + 8 \cdot 2^{\cos^2 x} = 10$.

$2^{1-\cos^2 x} + 8 \cdot 2^{\cos^2 x} = 10$

$\dfrac{2}{2^{\cos^2 x}} + 8 \cdot 2^{\cos^2 x} = 10$. Сделаем замену $t = \cos^2 x$

$\dfrac{2}{2^t} + 8 \cdot 2^t = 10$

$2 + 8 \cdot (2^t)^2 = 10 \cdot 2^t$

$8 \cdot (2^t)^2 - 10 \cdot 2^t + 2 = 0$.

Здесь логично сделать ещё одну замену: $2^t = y$. Тогда:

$8y^2 - 10y + 2 = 0 \quad \Rightarrow 4y^2 - 5y + 1 = 0$, найдём корни.

$D = 25 - 16 = 9$, $y = \dfrac{5 \pm 3}{8}$ $\quad y = 1$ либо $y = \dfrac{1}{4}$.

$y = 2^t = 1 \quad \Rightarrow \quad t = 0$

$y = 2^t = \dfrac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad t = -2$

$t = -2$ не входит в область допустимых значений.

Итак, $t = \cos^2 x$ принимает значение 0.

Решением уравнения $\cos x = 0$ является множество $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$.

Ответ. $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$.

Олимпиада по математике   ТУСУР, 2019
1 курс   задача 2

Найти все действительные решения уравнения: $x^4+12x^2+36=125x-150$.

Решение. $x^4+12x^2+36=125x-150$.

Преобразуем, сведя к виду: $(x^2+6)^2=25(5x-6)=5^2(5x-6)$.

Тогда $\left(\dfrac{x^2+6}{5}\right)^2=5x-6$, то есть $\dfrac{x^2+6}{5}=\sqrt{5x-6}$.

Если $t=\dfrac{x^2+6}{5}$ то $5t=x^2+6$, $x^2=5t-6$, $x=\sqrt{5t-6}$. Таким образом, в равенстве $\dfrac{x^2+6}{5}=\sqrt{5x-6}$ две взаимно обратные функции. Тогда их графики могут пересекаться только на биссектрисе $y=x$. Значит, нам достаточно решить уравнение $\dfrac{x^2+6}{5}=x$.

$x^2-5x+6=0$, $D=25-24=1$, корни $\dfrac{5\pm1}{2}$, то есть 2 и 3.

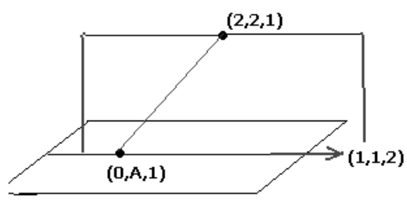
Ответ. 2 и 3.

Олимпиада по математике ТУСУР, 2019
1 курс задача 3

Прямая $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}$ является проекцией прямой $\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{2}$ на плоскость S_1,
а прямая $\frac{x}{1}=\frac{y-A}{1}=\frac{z-1}{2}$ является проекцией этой же прямой на плоскость S_2.
Найти параметр A, при котором плоскости S_1 и S_2 ортогональны.

Решение. Из строения знаменателей дробей этих канонических уравенений видно, что все направляющие векторы прямых совпадают.
Найдём уравнение плоскости S_2, которая содержит проекцию, при произвольном A, тогда при $A=1$ частный случай для плоскости S_1.

Один из двух направляющих векторов этой плоскости известен: $l_1=(1,1,2)$.
Точка $(0,A,1)$ принадлежит прямой, являющейся проекцией.
Точка $(2,2,1)$ принадлежит той прямой, которая проецируется.
Вектор $(2,2-A,0)$ соединяет эти точки. Тогда плоскость, содержащая обе прямые, и проецируемую, и её проекцию (на чертеже эта плоскость расположена вертикально) имеет два образующих вектора: $(1,1,2)$ и $(2,2-A,0)$. Их векторное произведение лежит в искомой плоскости (куда проецируется прямая) и является её вторым образующим вектором.



$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2-A & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2-A & 0 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2-A \end{vmatrix} k = -(4-2A)i-(-4)j+(2-A-2)k =$$

Итак, второй направляющий вектор плосокости: $l_2=\left(2A-4,4,-A\right)$.
Теперь через точку $(0,A,1)$ и 2 направляющих $(1,1,2)$ и $\left(2A-4,4,-A\right)$ проведём плоскость.

$$\begin{vmatrix} x & y-A & z-1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2A-4 & 4 & -A \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -A \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2A-4 & -A \end{vmatrix} (y-A) + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2A-4 & 4 \end{vmatrix} (z-1) = 0 \Rightarrow$$

$$(-A-8)x-(-A-2(2A-4))(y-A)+(4-(2A-4))(z-1)=0 \Rightarrow$$

$$-(A+8)x-(-5A+8)(y-A)+(8-2A)(z-1)=0 \quad \Rightarrow \quad (A+8)x+(8-5A)(y-A)+(2A-8)(z-1)=0$$

Нормаль к плоскости S_2: $n=\left(A+8,8-5A,2A-8\right)$.
При $A=1$ получается нормаль к плоскости S_1, а именно $\left(9,3,-6\right)$, можно сократить в 3 раза и рассматривать вектор $\left(3,1,-2\right)$. Осталось узнать, при каком A векторы $\left(A+8,8-5A,2A-8\right)$ и $\left(3,1,-2\right)$ ортогональны между собой.

$3(A+8)+1(8-5A)-2(2A-8)=0 \Rightarrow 48-6A=0 \Rightarrow A=8$.

Ответ. $A=8$.

Олимпиада по математике ТУСУР, 2019
1 курс задача 4

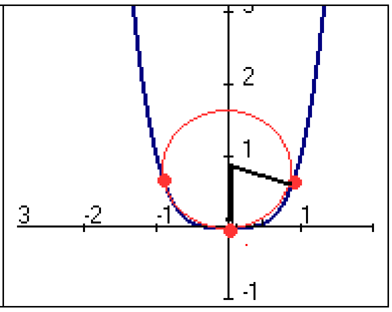
На графике $y = x^4$ при произвольном $a \neq 0$ могут быть взяты 3 точки с абсциссами 0, a, $-a$, через них проведена окружность. Найти минимально возможный диаметр окружностей, построенных таким способом.

Решение.

Пусть радиус равен R. Тогда расстояние от точки $(0,R)$ до точек $(0,0)$, (a,a^4) и $(-a,a^4)$ равно R. По теореме Пифагора,

$$R^2 = a^2 + (R - a^4)^2 \;\Rightarrow\; R^2 = a^2 + R^2 + a^8 - 2Ra^4 \;\Rightarrow$$

$$a^2 + a^8 - 2Ra^4 = 0 \;\Rightarrow\; 2Ra^4 = a^2 + a^8 \;\Rightarrow\; d = 2R = \frac{1}{a^2} + a^4 .$$



Найдём экстремум этой величины по a.

$$\left(\frac{1}{a^2} + a^4\right)' = \left(\frac{-2}{a^3} + 4a^3\right) = 0 \Rightarrow 4a^3 = \frac{2}{a^3} \Rightarrow a^6 = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \sqrt[6]{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt[6]{2}} .$$

При этом $\left(\frac{1}{a^2} + a^4\right)'' = \left(\frac{-2}{a^3} + 4a^3\right)' = \frac{6}{a^4} + 12a^2 > 0$, поэтому минимум, а не максимум.

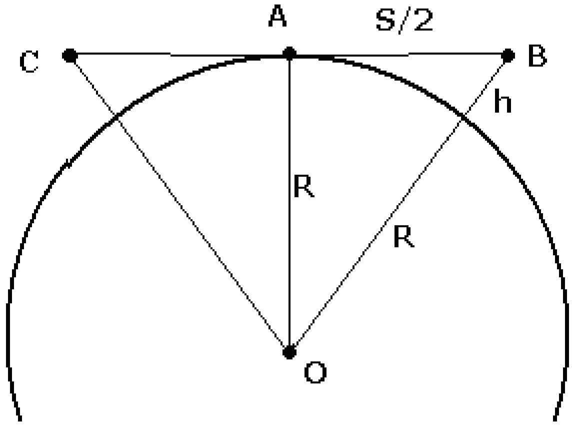
Теперь найдём d. $d = \frac{1}{a^2} + a^4 = \sqrt[6]{2}^2 + \frac{1}{\sqrt[6]{2}^4} = \sqrt[6]{2}^2 + \frac{1}{\sqrt[6]{2}^4} = \frac{\sqrt[6]{2}^6 + 1}{\sqrt[6]{2}^4} =$

$\frac{3}{\sqrt[6]{2}^4} = \frac{3}{\sqrt[3]{2}^2} = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$. **Ответ.** $\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$.

Олимпиада по математике ТУСУР, 2019
1 курс задача 5

Два космических аппарата взлетают вертикально с одинаковой скоростью из разных точек на планете, которая является шаром радиуса R. В некоторый момент времени они поднялись на высоту h и стали находиться в пределах прямой видимости друг друга. Каково расстояние между ними в этот момент времени?

Решение. На чертеже, $OA = R$, $OB = OC = R + h$. Два аппарата находятся в точках B и C.



Расстояние $\frac{S}{2} = AB$, это половина искомого расстояния. По теореме Пифагора,

$|AB| = \sqrt{|OB|^2 - |OA|^2} = \sqrt{(R+h)^2 - R^2} = \sqrt{2Rh + h^2}$. Тогда $S = 2\sqrt{2Rh + h^2} = 2\sqrt{h}\sqrt{2R + h}$.

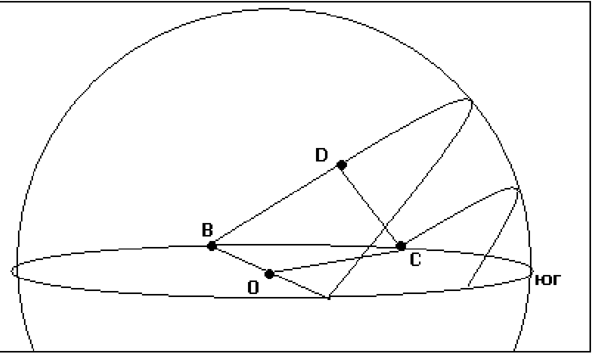
Ответ. $2\sqrt{h}\sqrt{2R + h}$.

Олимпиада по математике ТУСУР, 2019
1 курс задача 6

Пусть наклон оси планеты - угол γ, $0^0 \le \gamma \le 45^0$. Найти широту φ (в северном полушарии), на которой точка восхода Солнца в день солнцестояния отклоняется от востока ровно на 45^0, т.е. например, восход в день зимнего солнцестояния на юго-востоке.

Решение.

Рассмотрим путь Солнца по небесной сфере. По условию задачи, дуга BC составляет 45 градусов. B - восток. C - юго-восток. Показан пусть Солнца во время равноденствия и зимнего солнцестояния. Дуга CD соответствует углу γ (на какой угол отклоняется путь Солнца во время солнцестояния по сравнению с равноденствием).



Сферический угол DBC зависит от широты местности и равен $90-\varphi$ (на экваторе солнце восходит вертикально, ближе к полюсу почти горизонтально). Угол BDC=90^0 по построению, это перпендикуляр из точки C на дугу BD.

По теореме синусов для сферического треугольника верно равенство: $\dfrac{\sin D}{\sin BC} = \dfrac{\sin B}{\sin CD} = \dfrac{\sin C}{\sin BD}$ (синус угла, соотв. дуге, пропорционален синусу противолежащего угла) .

В частности, в нашем случае $\dfrac{\sin 90}{\sin 45} = \dfrac{\sin(90-\varphi)}{\sin\gamma} = \dfrac{\sin C}{\sin BD}$.

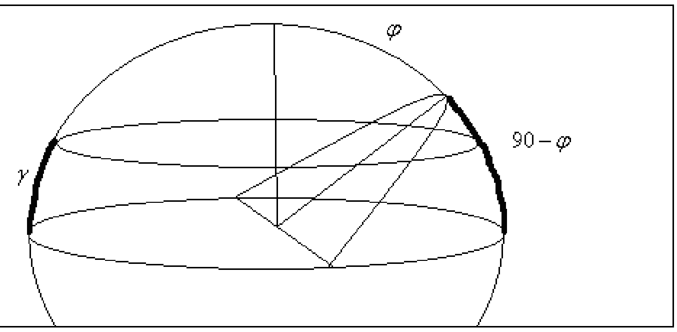
Для решения достаточно лишь первой пропорции. $\dfrac{1}{1/\sqrt{2}} = \dfrac{\sin(90-\varphi)}{\sin\gamma} \Rightarrow \dfrac{\sin(90-\varphi)}{\sin\gamma} = \sqrt{2} \Rightarrow$

$\sin(90-\varphi) = \cos\varphi = \sqrt{2}\sin\gamma \Rightarrow \varphi = \arccos\left(\sqrt{2}\sin\gamma\right)$. **Ответ.** $\varphi = \arccos\left(\sqrt{2}\sin\gamma\right)$.

Для сведения. Возможно и другое решение. Повернём сферу, так, чтобы пусть Солнца во время равноденствия занимал горизонтальную окружность максимального радиуса, а во время солнцестояния - на угол γ выше. Тогда горизонт наклонён под углом $90-\varphi$. При этом нужно, чтобы точка, движущаяся по горизонту, пересекла верхнюю окружность, пройдя по дуге ровно 45 градусов.

Уравнения движения: $\begin{cases} x = \sin\varphi\cos t \\ y = \sin t \\ z = \cos\varphi\cos t \end{cases}$

Надо, чтобы при $t = \dfrac{\pi}{4}$ достигалось $z = \sin\gamma$.



$$\cos\varphi\cos\frac{\pi}{4} = \sin\gamma \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\varphi = \sin\gamma \Rightarrow \cos\varphi = \sqrt{2}\sin\gamma \Rightarrow \varphi = \arccos\left(\sqrt{2}\sin\gamma\right).$$

Примечание. 1. Например, для Земли $\gamma = 23^0$, $\varphi = \arccos\left(\sqrt{2}\cdot\sin(23^0)\right) \approx 56^0$, т.е. явление наблюдается на широте Томска. Если было бы $\gamma = 45^0$ то $\varphi = \arccos(1) = 0$, т.е. на экваторе.